BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

О ФОРМУЛАХ СЛЕДОВ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Р.А.АТАИ, И.М.НАБИЕВ

Бакинский Государственный Университет,

Институт Математики и механики НАН Азербайджана

nabievim@yahoo.com

В работе получены формулы первого следа квадратичного пучка операторов с разделенными и неразделенными граничными условиями. При вычислении следа используется метод, предложенный Б.М.Левитаном. Изучено асимптотическое поведение характеристических функций и их разложения на бесконечное произведение, затем сравнив соответствующие коэффициенты, получены формулы следов.

В 1953 г. И.М.Гельфанд и Б.М.Левитан вычислили регуляризованный след для оператора Штурма-Лиувилля [1]:

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y\ ,\ 0 \le x \le \pi,$$

$$y'(0) = hy(0),\ y'(\pi) = -Hy(\pi).$$

После этого в [2,3] предложен другой метод, с помощью которого получены рекуррентные формулы для вычисления регуляризованных следов всех степеней оператора L. В 1964 г. Б.М.Левитан [4] предложил элементарный метод вычисления регуляризованных следов и провел вычисления до конца для первого следа. В настоящей работе с помощью метода Б.М.Левитана нам удалось получить формулу первого следа для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на отрезке с регулярными граничными условиями. Напомним, что Г.Ш.Гусейнов [5] вычислил первый регуляризованный след для этого пучка при условиях

$$y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + [\lambda^2 - 2\,\lambda\, p(x) - q(x)]y = 0\,, 0 \le x \le \pi\,, \tag{1}$$

$$y(0) + \omega\, y(\pi) = 0, \bar{\omega}\, y'(0) + \alpha\ y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

в которой $q(x) \in W_2^1[0,\pi], p(x) \in W_2^2[0,\pi], \operatorname{Im} q(x) = \operatorname{Im} p(x) = 0$, а ω и α - комплексные числа. Эту задачу обозначим через (p,ω,α).

Известно [6] , что для собственных значений $a_{2k}^{\pm}, a_{2k+1}^{\pm}, b_{2k}^{\pm}, b_{2k+1}^{\pm} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ краевых задач (p,ω,α), $(p,-\omega,\alpha), (\omega \ne \pm 1)$, $(p,-1,\alpha)$, $(p,1,\alpha)$ соответственно имеют место следующие асимптотические формулы:

$$a_{2k}^{\pm}=2k+a\pm\varphi+\frac{C_0\pm C_1}{2k+a\pm\varphi}+\frac{C_2+C_3\pm C_4}{(2k+a\pm\varphi)^2}+\frac{d_{2k}^{\pm}}{2k+a\pm\varphi}+\frac{\alpha_k^{\pm}}{k^2}, \tag{3}$$

$$a_{2k+1}^{\pm}=2k+1+a\mp\varphi+\frac{C_0\mp C_1}{2k+1+a\mp\varphi}+\frac{C_2+C_3\mp C_4}{(2k+1+a\mp\varphi)^2}+\frac{d_{2k+1}^{\mp}}{2k+1+a\mp\varphi}+\frac{\beta_k^{\mp}}{k^2}, \tag{3'}$$

$$b_{2k}^{\pm}=2k+a+\frac{p^{\pm}}{2k+a}+\frac{\gamma_k^{\pm}}{k}, \tag{3''}$$

$$b_{2k+1}^{\pm}=2k+1+a+\frac{p^{\mp}}{2k+1+a}+\frac{\delta_k^{\pm}}{k}, \tag{3'''}$$

где $C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[p^2(x)+q(x)\right]dx+\frac{\alpha}{\pi(1+r^2)}$, $C_1=\frac{(1-r^2)p_{01}ctg\pi\varphi}{2\pi(1+r^2)}$, $C_2=\frac{\alpha(r^2p_0+p_1)}{\pi(1+r^2)^2}$,

$$C_4=\frac{[p_1r_1+p_0r_0-(1-r^2)^2p_{01}ctg^2\pi\varphi]p_{01}+4\alpha^2}{8\pi(1+r^2)^2},$$

$$d_m^{\pm}=\frac{(1-r^2)\operatorname{cosec}\pi\varphi}{2\pi(1+r^2)}\int_0^{\pi}\left[p'(x)\cos S_m^{\pm}(x)+q(x)\sin S_m^{\pm}(x)\right]dx,$$

$$p^{\pm}=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[p^2(x)+q(x)\right]dx+\alpha\pm\sqrt{p_{01}^2+\alpha^2}\right\},$$

$$S_m^{\pm}=2(m+a)x\mp(\pi-2x)\varphi-2\int_0^x p(t)dt,$$

$$a=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}p(x)dx\ ,\ \varphi=\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2\operatorname{Re}\omega}{1+r^2}\right), r_1=5-6r^2-3r^4, r_0=3+6r^2-5r^4, r=|\omega|,$$

$$p_{01}=p_0-p_1, p_0=p(0), p_1=p(\pi),\ \sum_k\left\{|\alpha_k^{\pm}|^2+|\beta_k^{\pm}|^2+|\gamma_k^{\pm}|^2+|\delta_k^{\pm}|^2\right\}<\infty, \tag{4}$$

число C_3 не зависит от k, α и равно нулю при $p(x)\equiv 0$.

Из $(1),(1'),(1''),\ (1''')$ следуют , что

$$S_{1,\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}\right)+\left(a_{2k}^{-}-2k-a+\varphi-\frac{C_0-C_1+d_{2k}^{-}}{2k+a-\varphi}\right)\right]<\infty, \tag{5}$$

$$S_{1,-\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(a_{2k+1}^{+}-2k-1-a+\varphi-\frac{C_0-C_1+d_{2k+1}^{-}}{2k+a+\varphi+1}\right)+\left(a_{2k+1}^{-}-2k-a+\varphi-1-\frac{C_0+C_1+d_{2k+1}^{+}}{2k+a-\varphi+1}\right)\right]<\infty, \tag{5'}$$

$$S_{1,-1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(b_{2k}^{+}-2k-a-\frac{p^{+}}{2k+a}\right)+\left(b_{2k}^{-}-2k-a-\frac{p^{-}}{2k+a}\right)\right]<\infty, \tag{5''}$$

$$S_{1,1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(b_{2k+1}^{+}-2k-1-a-\frac{p^{+}}{2k+1+a}\right)+\left(b_{2k+1}^{-}-2k-1-a-\frac{p^{-}}{2k+a+1}\right)\right]<\infty \tag{5'''}$$

Определение. Числа $S_{1,\omega}, S_{1,-\omega}, S_{1,-1}$, $S_{1,1}$ называются первыми регуляризованными следами задач (p,ω,α), $(p,-\omega,\alpha),(\omega\neq\pm1)$, $(p,-1,\alpha)$, $(p,1,\alpha)$ соответственно.

Наша цель - выразить $S_{1,\omega}, S_{1,-\omega}, S_{1,-1}, S_{1,1}$ через $q(x), p(x), \alpha, \omega$.

Прежде всего докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k+a\pm\varphi-a_{2k}^{\pm}}{2k+\mu+a\pm\varphi}\right|^{j}\le \mathrm{M}_1\frac{1}{\mu^{2j-1}}, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k+a\mp\varphi+1-a_{2k+1}^{\pm}}{2k+\mu+a-\varphi+1}\right|^{j}\le \mathrm{M}_2\frac{1}{\mu^{2j-1}}, \tag{6$'$}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k+a-b_{2k}^{\pm}}{2k+\mu+a}\right|^{j}\le \mathrm{M}_3\frac{1}{\mu^{2j-1}}, \tag{6$''$}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k+a+1-b_{2k+1}^{\pm}}{2k+\mu+a+1}\right|^{j}\le \mathrm{M}_4\frac{1}{\mu^{2j-1}}, \tag{6$'''$}$$

где $\mathrm{M}_i>0,\ i=\overline{1,4}\ ,\ j=1,2,...$

Доказательство. Используя асимптотическую формулу (3), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k+a\pm\varphi-a_{2k}^{\pm}}{2k+\mu+a+\varphi}\right|^{j}\le \mathrm{M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(2k+a\pm\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}\right|^{j}\le \mathrm{M}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^j(x+\mu)^j}=$$

$$=\frac{\mathrm{M}}{\mu^{2j}}\int_0^{\infty}\frac{\mu d\,{x}/{\mu}}{\left({x}/{\mu}\right)^j\left(1+{x}/{\mu}\right)^j}=\mathrm{M}_1\frac{1}{\mu^{2j-1}},$$

Другие неравенства получаются аналогично. Лемма доказана.

Обозначим через $s(x,\lambda)$ и $c(x,\lambda)$ решения уравнение (1) при начальных условиях

$$s(0,\lambda)=0\ ,s'(0,\lambda)=1;\quad c(0,\lambda)=1\ ,c'(0,\lambda)=0\ ,$$

соответственно.

Лемма 2 $[7]$. *Имеют место следующие представления:*

$$c(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-c_0)-d_1\frac{\cos\pi(\lambda-c_0)}{\lambda}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\lambda-c_0)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_1(t)e^{i\lambda t}dt\ , \tag{7}$$

$$c'(\pi,\lambda)=-\lambda\sin\pi(\lambda-c_0)+c_1\sin\pi(\lambda-c_0)+\pi a_1\cos\pi(\lambda-c_0)+\int_{-\pi}^{\pi}\psi_2(t)e^{i\lambda t}dt\ , \tag{8}$$

$$s(\pi,\lambda)=\frac{\sin\pi(\lambda-c_0)}{\lambda}+c_1\frac{\sin\pi(\lambda-c_0)}{\lambda^2}-\pi a_1\frac{\cos\pi(\lambda-c_0)}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_3(t)e^{i\lambda t}dt\ , \tag{9}$$

$$s'(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-c_0)+d_1\frac{\cos\pi(\lambda-c_0)}{\lambda}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\lambda-c_0)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_4(t)e^{i\lambda t}dt\ , \tag{10}$$

где

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}p(t)dt\ ,\quad a_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[q(t)+p^2(t)\right]dt\ ,\quad c_1=\frac{1}{2}\left[p(0)+p(\pi)\right],$$

$$d_1=\frac{p_{01}}{2}=\frac{1}{2}\left[p(0)-p(\pi)\right]\qquad \psi_i(x)\in L_2(-\pi,\pi), i=\overline{1,4}.$$

Теорема. *Справедливы равенства*

$$S_{1,\omega}=-2a+\frac{\pi C_1\sin\pi\varphi+\pi C_0\sin\pi a}{\cos\pi\varphi-\cos\pi a}-\frac{\pi}{2}\left[d^{+}_{-(a+\varphi)}ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)+d^{-}_{-(a-\varphi)}ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right]-\pi C_1 tg\pi\varphi, \qquad (11)$$

$$S_{1,-\omega}=-2a-\frac{\pi C_0\sin\pi\varphi+\pi C_1\sin\pi a}{\cos\pi a+\cos\pi\varphi}+\frac{\pi}{2}\left[d^{-}_{-(a+\varphi)}tg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)-d^{+}_{-(a-\varphi)}tg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right]-C_1\pi tg\pi\varphi, \qquad (11')$$

$$S_{1,-1}=-2a-\frac{\pi}{2}\left(p^{+}+p^{-}\right)ctg\pi\frac{a}{2}, \qquad (11'')$$

$$S_{1,1}=-2a+\frac{\pi}{2}\left(p^{+}+p^{-}\right)tg\pi\frac{a}{2}, \qquad (11''')$$

где C_0, C_1, $d^{\pm}_m$, $p^{\pm}$, $S^{\pm}_m$, a, φ, r, p_{01}, p_0, p_1 *определяются равенствами (4).*

Доказательство: Найдем характеристическую функцию задачи (p,ω,α):

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}1+\omega c(\pi,\lambda) & \omega s(\pi,\lambda)\\ \alpha c(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda) & \overline{\omega}+\alpha s(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)\end{vmatrix}=\overline{\omega}+\alpha s(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)+|\omega|^2 c(\pi,\lambda)+$$

$$+\alpha\omega s(\pi,\lambda)c(\pi,\lambda)+\omega c(\pi,\lambda)s'(\pi,\lambda)-\alpha\omega s(\pi,\lambda)c(\pi,\lambda)-\omega s(\pi,\lambda)c'(\pi,\lambda)=$$

$$=\mathrm{Re}\,\omega+\alpha s(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)+|\omega|^2 c(\pi,\lambda). \qquad (12)$$

Как известно, собственные значения задачи суть нули функции $\chi(\lambda)$. Поэтому для задачи (p,ω,α)

$$\chi(\lambda)=A\Phi(\lambda)=A\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{-2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{-2k}}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{0}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{0}}\right). \qquad (13)$$

Равенство (13) лежит в основе доказательства теоремы. В дальнейшем будем изучать асимптотическое поведение обеих частей равенства (13) при больших $\mu=-\lambda$, а затем сравнив соответствующие коэффициенты, получим доказательство теоремы.

Найдем асимптотическое разложение правой части равенства (13):

$$A\Phi(\lambda)=A\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{-2k}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{-2k}}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{a^{+}_{0}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^{-}_{0}}\right)=$$

$$=A\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{-2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{-2k}}\right)\right]\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{0}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{0}}\right)=$$

$$=A\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{0}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{0}}\right)\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{+}_{-2k}}\right)\left(1+\frac{\mu}{a^{-}_{-2k}}\right)\right]}{\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\mu+a+\varphi}{2k}\right)\left(1+\frac{\mu+a+\varphi}{-2k}\right)\left(1+\frac{\mu+a-\varphi}{2k}\right)\left(1+\frac{\mu+a-\varphi}{-2k}\right)\right]}\times$$

$$\times\frac{\sin\pi\left(\frac{\mu+a+\varphi}{2}\right)}{\pi\left(\frac{\mu+a+\varphi}{2}\right)}\frac{\sin\pi\left(\frac{\mu+a-\varphi}{2}\right)}{\pi\left(\frac{\mu+a-\varphi}{2}\right)}=AC\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a^{+}_{2k}-2k-a-\varphi}{2k+\mu+a+\varphi}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a^{-}_{2k}-2k-a+\varphi}{2k+\mu+a-\varphi}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{-2k}^{+}-2k-a-\varphi}{-2k+\mu+a+\varphi}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{-2k}^{-}-2k-a+\varphi}{-2k+\mu+a-\varphi}\right)(a_0^{+}+\mu)(a_0^{-}+\mu)\frac{\sin\pi\left(\frac{\mu+a+\varphi}{2}\right)}{\pi\left(\frac{\mu+a+\varphi}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\sin\pi\left(\frac{\mu+a-\varphi}{2}\right)}{\pi\left(\frac{\mu+a-\varphi}{2}\right)}=B\frac{2}{\pi^2}\frac{[\cos\pi\varphi-\cos\pi(\mu+a)]}{(\mu+a+\varphi)(\mu+a-\varphi)}(a_0^{+}+\mu)(a_0^{-}+\mu)\psi_1^{+}(\mu)\psi_1^{-}(\mu)\psi_2^{+}(\mu)\psi_2^{-}(\mu),\quad(14)$$

где $\psi_1^{+}(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi}{2k+\mu+a+\varphi}\right)$, $\quad\psi_1^{-}(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{2k}^{-}-2k-a+\varphi}{2k+\mu+a-\varphi}\right)$,

$\psi_2^{+}(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{-2k}^{+}-2k-a-\varphi}{-2k+\mu+a+\varphi}\right)$, $\quad\psi_2^{-}(\mu)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_{-2k}^{-}+2k-a+\varphi}{-2k+\mu+a-\varphi}\right)$.

Тогда $\ln\psi_1^{+}(\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi}{2k+\mu+a+\varphi}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{2k+a+\varphi-a_{2k}^{+}}{2k+\mu+a+\varphi}\right)^{j}=-\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{2k+a+\varphi-a_{2k}^{+}}{2k+\mu+a+\varphi}\right)^{j}-$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+a+\varphi-a_{2k}^{+}}{2k+\mu+a+\varphi}\right).$$

Используя соотношение (6) , в силу леммы 1 получаем, что

$$\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{2k+a+\varphi-a_{2k}^{+}}{2k+\mu+a+\varphi}\right)^{j}\le \mathrm{M}\frac{b^2}{\mu^3}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b}{\mu^2}\right)^{j}=O\left(\frac{1}{\mu^3}\right),\ \mu\to+\infty,$$

где M, b - положительные числа.

Далее,

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+a+\varphi-a_{2k}^{+}}{2k+\mu+a+\varphi}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1}{2k+a+\varphi}-\frac{d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}}{2k+a+\varphi+\mu}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1}{2k+a+\varphi}-\frac{d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}}{2k+a+\varphi+\mu}\left[2k+a+\varphi+\mu-(2k+a+\varphi)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1}{2k+a+\varphi}-\frac{d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1}{2k+a+\varphi}-\frac{d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}}{2k+a+\varphi+\mu}(2k+a+\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1}{2k+a+\varphi}-\frac{d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty.$$

Следовательно,

$\ln\psi_1^{+}(\mu)=$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}^{+}-2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{2k+a+\varphi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^{+}}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty.$$

Аналогично,

$$\ln\psi_1^-(\mu)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}^- -2k-a+\varphi-\frac{C_0-C_1+d_{2k}^-}{2k+a-\varphi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0-C_1+d_{2k}^+}{(2k+a-\varphi)(2k+a-\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty,$$

$$\ln\psi_2^+(\mu)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{-2k}^+ +2k-a-\varphi-\frac{C_0+C_1+d_{-2k}^+}{-2k+a+\varphi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0+C_1+d_{-2k}^+}{(-2k+a+\varphi)(-2k+a+\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty,$$

$$\ln\psi^-(\mu)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{-2k}^- +2k-a+\varphi-\frac{C_0-C_1+d_{-2k}^-}{-2k+a-\varphi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_0-C_1+d_{-2k}^-}{(-2k+a-\varphi)(-2k+a-\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty.$$

Сложив последние соотношения, получаем:

$$\ln\left[\psi_1^+(\mu)\psi_1^-(\mu)\psi_2^+(\mu)\psi_2^-(\mu)\right]=\frac{1}{\mu}\left[s_\lambda-a_0^- -a_0^+ +2a\right]+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_0-C_1+d_{2k}^-}{(2k+a-\varphi)(2k+a-\varphi+\mu)}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty. \qquad (15)$$

Найдем суммы рядов в правой части равенства (15).Очевидно, что

$$\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}=O(k^{-2}),k\to+\infty.$$

Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{(2k+a+\varphi)(2k+a+\varphi+\mu)}=\frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{\left(k+\frac{a+\varphi}{2}\right)\left(k+\frac{a+\varphi+\mu}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left\{\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{k+\frac{a+\varphi}{2}}ctg\pi k\Big|_{k=-\frac{a+\varphi+\mu}{2}}+\frac{C_0+C_1+d_{2k}^+}{k+\frac{a+\varphi+\mu}{2}}ctg\pi k\Big|_{k=-\frac{a+\varphi}{2}}\right\}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left\{\frac{C_0+C_1+d_{-(a+\varphi+\mu)}^+}{\mu/2}ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\frac{C_0+C_1+d_{-(a+\varphi)}^+}{\mu/2}ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right\}=$$

$$=-\frac{\pi}{2\mu}\left\{\left[C_0+C_1+d_{-(a+\varphi+\mu)}^+\right]ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\left[C_0+C_1+d_{-(a+\varphi)}^+\right]ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right\}. \qquad (16)$$

Аналогично, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_0-C_1+d_{2k}^-}{(2k+a-\varphi)(2k+a-\varphi+\mu)}=$

$$=-\frac{\pi}{2\mu}\left\{\left[C_0-C_1+d_{-(a+\mu-\varphi)}^-\right]ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi+\mu)-\left[C_0-C_1+d_{-(a-\varphi)}^-\right]ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right\}. \qquad (17)$$

Учитывая равенств (16) и (17) в соотношении (15), получаем, что

$$\psi_1^+(\mu)\psi_1^-(\mu)\psi_2^+(\mu)\psi_2^-(\mu)=$$

$$=1+\frac{1}{\mu}\left[s_\lambda-a_0^- -a_0^+ +2a\right]-\frac{\pi}{2\mu}\left\{\left[C_0+C_1+d_{-(a+\varphi+\mu)}^+\right]ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\left[C_0+C_1+d_{-(a+\varphi)}^+\right]ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right\}-$$

$$-\frac{\pi}{2\mu}\left\{\left[C_0-C_1+d_{-(a+\mu-\varphi)}^-\right]ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi+\mu)-\left[C_0-C_1+d_{-(a-\varphi)}^-\right]ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right\}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty.$$

Тогда в силу равенства (14), имеем:

$$A\Phi(\lambda)=A\Phi(-\mu)=\frac{2}{\pi^2}AC\frac{\cos\pi\varphi-\cos\pi(\mu+a)}{(\mu+a+\varphi)(\mu+a-\varphi)}\left(\mu+a_0^+\right)\left(\mu+a_0^-\right)\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\mu}\left(s_\lambda-a_0^--a_0^++2a\right)-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi+\mu)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0-C_1+d^-_{-(a+\mu-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi+\mu)-\left(C_0-C_1+d^-_{-(a-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right]+O(\mu^{-2})\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}B[\cos\pi\varphi-\cos\pi(\mu+a)]\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\mu}(s_\lambda+2a)-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi+\mu)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0-C_1+d^-_{-(a+\mu-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi+\mu)-\left(C_0-C_1+d^-_{-(a-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right]+O(\mu^{-2})\right\},\mu\to+\infty\cdot \quad (18)$$

Последнее равенство дает асимптотическое разложение правой части равенства (13).

Теперь найдем асимптотику левой части (13). В силу равенств (7),(8) и (10), из леммы 2 получаем:

$$c(\pi,\lambda)=c(\pi,-\mu)=\cos\pi\left(\mu+c_0\right)+d_1\frac{\cos\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\mu+c_0)}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}\mu\int_{-\pi}^{\pi}\psi_1(t)e^{-i\mu t}dt=$$

$$=\cos\pi\left(\mu+c_0\right)+d_1\frac{\cos\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\mu+c_0)}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}i\left[\psi_1(t)e^{-i\mu t}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\mu t}\psi_1'(t)dt\right]=$$

$$=\cos\pi\left(\mu+c_0\right)+d_1\frac{\cos\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\mu+c_0)}{\mu}-$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\left\{\cos\mu\pi[i\psi_1(\pi)-i\psi_1(-\pi)]+\sin\mu\pi[\psi_1(\pi)+\psi_1(-\pi)]-\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\mu t}\psi_1(t)dt\right\}=$$

$$=\cos\pi\left(\mu+c_0\right)+d_1\frac{\cos\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+\pi a_1\frac{\sin\pi(\mu+c_0)}{\mu}-O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),\mu\to+\infty,$$

$$s(\pi,\lambda)=s(\pi,-\mu)=\frac{\sin\pi(\mu+c_0)}{\mu}+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty\ ,$$

$$s'(\pi,\lambda)=\cos\pi\left(\mu+c_0\right)-d_1\frac{\cos\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+\pi a_1\frac{\sin\pi\left(\mu+c_0\right)}{\mu}+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),\mu\to+\infty\cdot$$

Тогда в силу равенства (13), имеем :

$$\chi(\lambda)=\chi(-\mu)=\omega+\overline{\omega}+\alpha\frac{\sin\pi\left(\mu+a\right)}{\mu}+\cos\pi\left(\mu+a\right)-\frac{d_1}{\mu}\cos\pi\left(\mu+a\right)+\pi a_1\frac{\sin\pi\left(\mu+a\right)}{\mu}+$$

$$+|\omega|^2\left[\cos\pi\left(\mu+a\right)+\frac{d_1}{\mu}\cos\pi\left(\mu+a\right)+\pi a_1\frac{\sin\pi\left(\mu+a\right)}{\mu}\right]+O(\mu^{-2}),\mu\to+\infty\cdot \quad (19)$$

Подставим (18) и (19) в (13):

$$\frac{2}{\pi^2}B[\cos\pi\varphi-\cos\pi(\mu+a)]\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\mu}(s_\lambda+2a)-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi+\mu)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi+\mu)-\left(C_0+C_1+d^+_{-(a+\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a+\varphi)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2\mu}\left[\left(C_0-C_1+d^-_{-(a+\mu-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi+\mu)-\left(C_0-C_1+d^-_{-(a-\varphi)}\right)ctg\frac{\pi}{2}(a-\varphi)\right]+O(\mu^{-2})\right\}=2\,\mathrm{Re}\,\omega+$$

$$+\left(\alpha+\pi a_1+|\omega|^2\pi a_1\right)\frac{\sin\pi(\mu+a)}{\mu}+\left(1+|\omega|^2\right)\cos\pi(\mu+a)+d_1\left(|\omega|^2-1\right)\frac{\cos\pi(\mu+a)}{\mu}+O\left(\mu^{-2}\right),\mu\to+\infty\cdot \quad (20)$$

Подставляя $\mu=\varphi-a+4k+1$ и переходя к пределу при $k\to+\infty$,имеем:

$\frac{2}{\pi^2}B[\cos\pi\varphi+\cos\pi\varphi]=2\operatorname{Re}\omega-\left(1+|\omega|^2\right)\cos\pi\varphi$. Поскольку $\cos\pi\varphi=-\frac{2\operatorname{Re}\omega}{1+|\omega|^2}$,

$$\frac{2}{\pi^2}B=-\left(1+|\omega|^2\right)\cdot \qquad (21)$$

Сравнив коэффициенты при $\frac{\cos\pi(\mu+c_0)}{\mu}$ слева и справа в равенстве (20) и учитывав (21), получим равенство (11).Аналогично можно получить другие равенства теоремы. Теорема доказана.

Таким же способом можно получить , что формула первого следа для задачи

$$y''+[\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x)]y=0\,,0\le x\le\pi\,,$$
$$y'(0)=hy(0),\ y'(\pi)=-Hy(\pi)$$

имеет вид:

$$s_\lambda=\frac{p(0)+p(\pi)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(t)dt\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка //Докл. АН СССР, 1953, 88, №4, с. 953-956.
2. Дикий Л.А. Дзета функция обыкновенного дифференциального оператора на конечном отрезке // Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19 , с. 187-200.
3. Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля //Успехи матем. наук , 1958, 13, в. 3(81), с.111-143.
4. Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля //Успехи матем. наук , 1964, 19, в. 1(115), с. 161-165.
5. Гусейнов Г.Ш. Спектр и разложения по собственным функциям квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами // В сб.: Спектральная теория операторов и ее приложения, Баку, 1985, в. 6, с. 56-97.
6. Набиев И.М. Асимптотические формулы для спектра квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля // Матер.конф.”Вопросы функ. анал.и мат.физ.”,1999, с. 374-376.
7. Гусейнов Г.Ш. Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнения Штурма-Лиувилля Препринт, №113, Института Физ. АН СССР, 1984, 49 с.
8. Chuan Fu Yang New trace formulae for a quadratic pencil of the Sturm-Liouville operator, Journal of Mathematical Physics, 2010, 51, p.97-86.
9. Sadovnichii, V. A. and Podol’skii, V. E., Traces of differential operators, Differential Equations, 45, 477, 2009.
10. Yang, C. F., Reconstruction of the diffusion operator from nodal data, Z. Naturforsch., A: Phys. Sci. 65a, 1, 2010.

KVADRATİK ŞTURM-LİUVİLL OPERATORLAR DƏSTƏSİNİN İZ DÜSTURLARI HAQQINDA

R.Ə.ƏTAYİ, İ.M.NƏBİYEV

XÜLASƏ

İşdə ayrılan və ayrılmayan sərhəd şərtli kvadratik Şturm-Liuvill operatorlar dəstəsi üçün birinci izin düsturları alınmışdır. İzin hesablanması zamanı B.M.Levitanın təklif etdiyi üsuldan istifadə edilir. Xarakteristik funksiyaların və onların sonsuz hasilə ayrılışının asimptotikası öyrənilmiş, sonra uyğun əmsallar bərabərləşdirilərək iz düsturları alınmışdır.

ON THE TRACE FORMULAE OF QUADRATIC BUNDLA OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

R.A.ATAI, I.M.NABIEV

SUMMARY

İn this work it has been obtained the trace formulae of the first order for the quadratic bundla of Sturm-Liouville operators with separated and not separated border conditions. It is used the method suggested by B.M.Levitan during calculation. It has been researched asymptotic separation of the characteristic functions and theirs infinite multiply and then the trace formulae has been got by equalizing corresponding coefficients.